Теория 9, 11.
Как и почему связаны в перколяционно-клеточном автомате степень перестановок, простые числа и число ручек, задающих топологию граничных условий? Рассказать об устройстве рабочего поля перколяционно-клеточного автомата и прокомментировать пример его прикладнго применения.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Перколяция

В физике и химии явлением перколяции (от лат. просачиваться, протекать) называется явление протекания или не протекания жидкостей через пористые материалы, электричества через смесь проводящих и непроводящих частиц и другие подобные процессы. Теория перколяции находит применение в описании разнообразных систем и явлений, в том числе таких, как распространение эпидемий и надежность компьютерных сетей.

Некоторые примеры задач, которые решаются через теорию перколяции:

Сколько надо добавить медных опилок в ящик с песком, чтобы смесь начала проводить ток?

Какой процент людей должен быть восприимчив к болезни, чтобы стала возможна эпидемия?

Клеточный автомат

Дискретная модель, представляющая собой сетку произвольной размерности, каждая клетка которой в каждый момент времени может принимать одно из конечного множества состояний, и определено правило перехода клеток из одного состояния в другое (состояния каждой клетки меняются в зависимости от состояния её самой и ближайших соседей).

Пусть задано конечное множество X_0 – состояний одной клетки. Для простоты будем считать ($p \geq 2$):

$$X_0 = \begin{cases} -(p-1), ..., -1 & \text{если она имеет синий цвет (b - blue)} \\ 0 & \text{если она имеет белый цвет (w - white)} \\ 1, ..., p-1 & \text{если она имеет красный цвет (r - red)} \end{cases}$$

Положим $X_{ij} = X_0$ для каждой клетки с координатами (i, j) 2-мерной целочисленной решётки $Z = Z^2$, предварительно разместив цвета клеток равномерно случайно по рабочему полю;

согласно условию: $N(s)_r + N(s)_b + N(s)_w = N_0 - const$, где $N(s)_{r,b,w}$ – число клеток данного цвета в момент времени s,

при этом $N(s)_w, N_0 - const$;

Каждая клетка с координатами (i, j) «опрашивает» своих соседей по окрестности Мура с $r = 1$(то есть 8 соседних клеток) об их цвете:

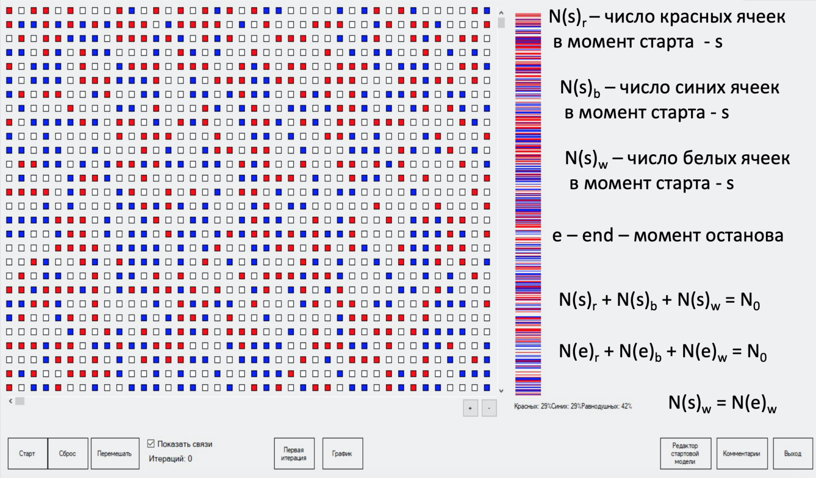
если цвета совпадают, то состояния этих клеток не меняются;

если цвета разные, то

а) в случае белого цвета, помимо его сохранения, через эту клетку строится вектор длины $r = 2$, и в клетке на конце этого вектора цвет не меняется;

б) в случае иного цвета, состояние клетки меняется на 1 в пользу цвета клетки – источника, помимо такого акта, через эту клетку строится вектор длины r=2, и в клетке на конце этого вектора цвет также изменится, если она не белая, и не одного цвета с клеткой источником.

Теория 9, 11



$N(s)_r$ – число красных ячеек в момент старта - s

$N(s)_b$ – число синих ячеек в момент старта - s

$N(s)_w$ – число белых ячеек в момент старта - s

e – end – момент останова

$$N(s)_r + N(s)_b + N(s)_w = N_0$$

$$N(e)_r + N(e)_b + N(e)_w = N_0$$

$$N(s)_w = N(e)_w$$

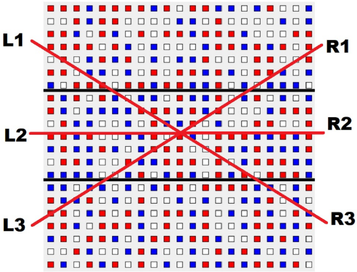
Теория 9, 11

Проводится несколько итераций работы ПКА, пока он не выйдет на "плато"(количество ячеек определенного цвета).

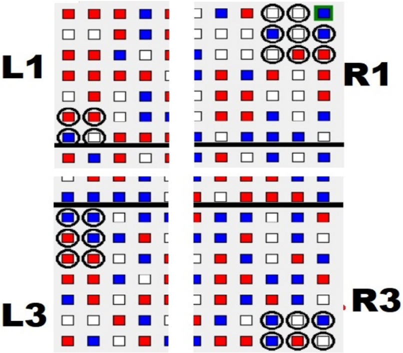
Эксперементальные вычисления в ПКА породило один из важнейших результатов – установление эмпирического факта зависимости времени релаксации ПКА (выхода на «плато» динамического равновесия) от топологического рода граничных условий рабочего поля автомата.

Топологический род поверхности γ визуализируется в виде разбиения границы на отрезки и их связывания.

Социологически это интерпретируется в виде степени связности социума.



Переход на краях поверхности

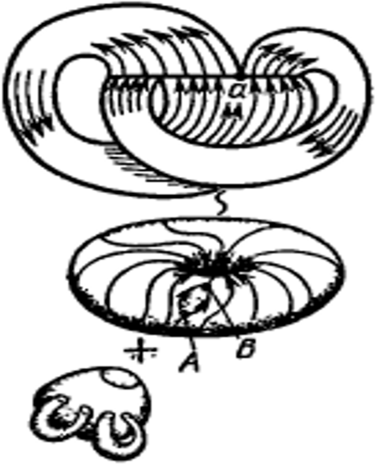


Связи клеток на краях поля

Перекладывание 3-х под-интервалов – преобразование пучка параллельных отрезков – как формирование всюду плотных траекторий на компактной 2-мерной поверхности рода 3 (тор, приклеенный к кренделю).

Всюду плотная траектория на множестве по определению проходит через любую сколь угодно малую окрестность произвольной точки на этом множестве.

Множество M называется всюду плотным в множестве N, если в любой окрестности из N существуют точки из M.



Возникает эффект перемешивания.

Для сильной эргодичности, т.е. возможности считать средние величины для всего рабочего поля ПКА, необходимы простые числа: 3, 5, 7, 11,...

Теория 9, 11

По существу в основе этого перекладывания лежит перестановка степени 3, которая совпадает с родом поверхности $\gamma = 3$, т.е., к примеру, 1-2-3 переходит в 3-2-1. В итоге возникает эффект перемешивания влияний цветных клеток ПКА друг на друга, при этом чем больше связность, т.е. «ручек», тем быстрее происходит перемешивание, и таким образом, быстрее осуществляется процесс усреднения. Для того, чтобы рабочее поле имело одну эргодическую компоненту, необходимую для расчёта средних величин, требуется чтобы степенями перестановок были простые числа.

1. Род поверхности γ существенно влияет на процесс перколяции: с ростом рода, т.е. степени связности социума, увеличивается скорость процесса релаксации к локальному равновесию;
2. Уменьшение плотности неактивных клеток решётки рабочего поля взаимозаменяемо с родом поверхности γ

Топологическая энтропия показывает меру сложности системы. Возникает вопрос о топологической энтропии клеточного автомата. К настоящему времени накопилось достаточно много информации о многомерных ($d \geq 2$) клеточных автоматах. Например, в работе (D'amico M., Manzini G., Margara L. On Computing the Entropy of Cellular Automata // Theoretical Computer Science.) показано, что если локальные правила являются линейной (булевой) функцией, то топологическая энтропия $/h_{top}$ равна либо нулю, либо бесконечности. В работе (Лакштанов Е.Л., Лангваген Е.С. Критерий бесконечности топологической энтропии многомерных клеточных автоматов) найдено достаточное условие бесконечности $/h_{top}$ большого класса КА, а именно наличие так называемых "космических кораблей часто возникающих в КА типа "Игра Жизнь".

Конфигурация «Жизни» или другого клеточного автомата называется космическим кораблём, если через определённое количество поколений она вновь появляется без дополнений или потерь, но со смещением относительно исходного положения.

Заметим при этом, что h_{top} одномерного клеточного автомата всегда ограничена величиной, зависящей только от радиуса взаимодействия клеток. Из совокупности этих исследований становится ясно, что топологическая энтропия КА при описании многомерных клеточных автоматов требует дополнительных нормировок; при этом вид нормировочных коэффициентов имеет и самостоятельный интерес, поскольку он определяет вид асимптотики функции информации - естественной величины, измеряющей сложность КА. Ранее Милнор поставил вопрос о получении оценки $0 < h_{top}(F) < \infty$, а Синай представил пример ответа на него с использованием перенормировки, т.е. замены нормирующего множителя $1/n$ на другой, с большей скоростью сходимости.

Если ПКА как динамическая система имеет устойчивое стационарное состояние, то его топологическая энтропия положительна и не равна бесконечности

Игра "Жизнь"

Место действия этой игры — «вселенная» — это размеченная на клетки поверхность или плоскость — безграничная, ограниченная, или замкнутая (в пределе — бесконечная плоскость).

Каждая клетка на этой поверхности может находиться в двух состояниях: быть «живой» (заполненной) или быть «мёртвой» (пустой).

Клетка имеет восемь соседей, окружающих её.

Распределение живых клеток в начале игры называется первым поколением.

Каждое следующее поколение рассчитывается на основе предыдущего по таким правилам:

1. в пустой (мёртвой) клетке, рядом с которой ровно три живые клетки, зарождается жизнь;
2. если у живой клетки есть две или три живые соседки, то эта клетка продолжает жить; в противном случае, если соседей меньше двух или больше трёх, клетка умирает («от одиночества» или «от перенаселённости»)

Игра прекращается, если

1. на поле не останется ни одной «живой» клетки
2. конфигурация на очередном шаге в точности (без сдвигов и поворотов) повторит себя же на одном из более ранних шагов (складывается периодическая конфигурация)
3. при очередном шаге ни одна из клеток не меняет своего состояния (складывается стабильная конфигурация; предыдущее правило, вырожденное до одного шага назад)

Эти простые правила приводят к огромному разнообразию форм, которые могут возникнуть в игре. parИгрок не принимает прямого участия в

игре, а лишь расставляет или генерирует начальную конфигурацию «живых» клеток, которые затем взаимодействуют согласно правилам уже без его участия (он является наблюдателем).